**Rozšíření MA1 - domácí úkol 5**

Diferenciální počet funkcí dvou a tří poměnných 2.

I. Diferencovatelnost funkce, totální diferenciál a lineární aproximace funkce:

1. Je dána funkce $f$ a bod $(x_0, y_0)$ (a vyberte si aspoň dvě funkce) :

$$f(x,y) = \ln(y - x^2),\ (x_0, y_0) = (1,2); \qquad f(x,y) = \exp(x^2 - y),\ (x_0, y_0) = (1,1);$$

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2,\quad (x_0, y_0) = (1,2); \qquad f(x,y) = \frac{x}{y},\ (x_0, y_0) = (-1,3);$$

$$f(x,y) = \ln(xy - 1),\quad (x_0, y_0) = (1,2).$$

a) Najděte definiční obor $D_f$ funkce $f$ a načrtněte jej.
b) Vypočítejte $\nabla f(x_0, y_0)$;
c) Ukažte, že funkce $f$ je diferencovatelná v bodě $(x_0, y_0)$ a určete v tomto bodě totální diferenciál funkce $f$ .
d) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu $f$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
e) Napište lineární aproximaci funkce $f(x,y)$ v okolí bodu $(x_0, y_0)$ .

2. Užitím lineární aproximace spočítejte přibližně
   a) $\ln(1{,}99 - (1{,}02)^2)$; nebo b) $\sqrt{(1{,}03)^2 + (1{,}98)^3}$ ; nebo c) $\exp((1{,}02)^2 - 0{,}97)$ .

3*. A trošku náročnější příklad (pro zájemce):

Ukažte, že funkce $f(x,y) = \sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když je v bodě $(0,0)$ spojitá a má zde obě parciální derivace .

II. Derivace složené funkce více proměnných

Derivace složené funkce více proměnných: „technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového“ pravidla - jaké to jsou předpoklady?
(Pokuste se aspoň dva následujících příkladů „sepsat“ a zjistit, co „nejde“- případné nejasnosti ještě probereme.)

1. Je-li $g(t) = f(\cos t, t^3)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$ pro obecnou funkci $f$ a pak pro $f(x,y) = x^y$ .
2. Určete $g'(x)$ a $g''(x)$ , je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$ .
3. Určete parciální derivace 1. řádu a některou z derivací 2. řádu funkce $g$ , je-li

   a) $g(x,y) = f(x^2 + y, xy^2)$; b) $g(x,y) = f(x^2 y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x})$ .
4. Určete parciální derivace 1. řádu a některou z derivací 2. řádu $g(x,y) = F(x, y, \varphi(x,y))$ .

5*. Transformujte diferenciální operátor $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$ do polárních souřadnic,

tj. $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ , $r \in (0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ .